Geometría Proyectiva

Segundo Cuatrimestre 2007

Práctica 1 - Curvas planas

1. La **Lemniscata**. Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la función
$$\alpha(t) = \left(t\frac{1+t^2}{1+t^4}, t\frac{1-t^2}{1+t^4} \right).$$
   a) Probar que α es diferenciable, regular y simple.
   b) Calcular $\lim_{t\to-\infty} \alpha(t)$ y $\lim_{t\to+\infty} \alpha(t)$. Concluir que α no es un homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ y su traza.

2. Un disco (circular) de radio 1 rueda en el plano xy sin resbalar sobre el eje x. La figura descripta por un punto fijo sobre la circunferencia del disco se llama **Cicloide**.
   a) Obtener una parametrización del cicloide. Determinar los puntos singulares.
   b) Calcular la longitud de arco del cicloide correspondiente a una rotación completa del disco.

3. Sea $\alpha : (0, \pi) \to \mathbb{R}^2$ dada por
$$\alpha(\theta) = (\sin(\theta), \cos(\theta) + \log(\tan(\frac{\theta}{2}))).$$
   La traza de α es llamada **Tractriz**.
   a) Probar que α es diferenciable pero no regular.
   b) Probar que la longitud del segmento de la tangente de la tractriz entre el punto de tangencia y la intersección con el eje y es siempre 1.

4. Sea $\alpha : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ dada por
$$\alpha(t) = (\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3}).$$
   a) Probar que α es tangente al eje x en $t = 0$.
   b) Probar que $\lim\limits_{t\to+\infty} \alpha(t) = (0, 0)$ y $\lim\limits_{t\to+\infty} \alpha'(t) = (0, 0)$.
   c) Ver que cuando $t \to -1$ esta curva y su tangente se aproximan a la recta $x + y + a = 0$.

La figura que se obtiene completando la curva con su simétrica respecto de la recta $y = x$ se llama **Folio de Descartes**.

5. Considerar la curva $\alpha(t) = (ae^{bt}\cos(t), ae^{bt}\sin(t))$ con $a > 0$ y $b < 0$ dos constantes. Esta curva se llama **Espiral logarítmica**.

   a) Mostrar que $\lim_{t\to+\infty} \alpha(t) = (0,0)$, siguiendo una trayectoria que envuelve al origen infinitas veces.

   b) Probar que $\lim_{t\to+\infty} \alpha'(t) = (0,0)$ y que $\lim_{t\to+\infty} \int_{t_0}^{t} |\alpha'(t)|dt$ es finito. Por lo tanto, α tiene longitud de arco finita en $[t_0, +\infty)$.

6. Sea α una curva que no pasa por el origen. Probar que si $\alpha(t_0)$ es el punto de su traza más próximo al origen y $\alpha'(t_0) \neq 0$, entonces $\alpha(t_0)$ y $\alpha'(t_0)$ son vectores ortogonales.

7. Probar que si todas las normales a una curva parametrizada por longitud de arco pasan por un punto fijo entonces la traza de la curva está contenida en un círculo.

8. Sea $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s))$ una curva parametrizada por longitud de arco. Sea $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$ la tangente de α y sea $\mathbf{n}(s)$ (la **normal** de α) el único vector unitario tal que $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ es una base ortonormal orientada de $\mathbb{R}^2$. La **curvatura** de α es el único escalar $\kappa(s)$ tal que

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa(s) \cdot \mathbf{n}(s). \tag{1}$$

   a) Probar que la curvatura de α es el área (con signo) del rectángulo definido por el par ordenado de vectores $\{\mathbf{t}, \mathbf{t}'\}$, y halle una expresión explícita para $\kappa(s)$ en función de $\alpha_1(s)$, $\alpha_2(s)$ y sus derivadas.

   b) Probar que $\mathbf{t}'$ y $\mathbf{n}'$ son ortogonales.

   c) Probar que $|\kappa(s)| \equiv 1/r$ si y sólo si α está contenida en una circunferencia de radio r.

   Observación: de (1), tomando módulos, se deduce la expresión conocida

$$|\kappa(s)| = |\mathbf{t}^{'}(s)| = |\alpha^{''}(s)|.$$

9. De la expresión para la curvatura κ_α de una curva α parametrizada por longitud de arco obtenida en el ejercicio anterior

$$\kappa_\alpha(s) = (\alpha_1^{'}\alpha_2^{''} - \alpha_2^{'}\alpha_1^{''})(s)$$

deduzca utilizando la regla de la cadena la expresión para una curva arbitraria $c(s)$ no necesariamente parametrizada por longitud de arco

$$\kappa_c = \frac{c_1^{'} c_2^{''} - c_2^{'} c_1^{''}}{[(c_1^{'})^2 + (c_2^{'})^2]^{3/2}}.$$

10. Dada una función diferenciable $k(s), s \in I \subset \mathbb{R}$, mostrar que la curva plana dada por

$$\alpha(s) = (\int \cos(\theta(s))ds + a, \int \sin(\theta(s))ds + b)$$

con $\theta(s) = \int k(s)ds + \phi$, tiene curvatura k y que está determinada unívocamente a menos de una traslación por el vector (a, b) y una rotación en el ángulo ϕ.

11. Dada una curva plana en coordenadas polares por $\rho = \rho(\theta),$ para $a \leq \theta \leq b$

    a) Mostrar que la longitud de arco es: $\int_a^b \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\theta$, donde $\rho' = \frac{d\rho}{d\theta}$.

    b) Mostrar que la curvatura es

$$k(\theta) = \frac{2(\rho')^2 - \rho\rho'' + \rho^2}{((\rho')^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}$$

12. Sea $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada por longitud de arco con curvatura nunca nula. Se llama **centro de curvatura de** α **en** s_0 a:

$$x(s_0) = \alpha(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} n(s_0)$$

y se llama **círculo osculador a** α **en** s_0 al círculo de centro $x(s_0)$ y radio $\rho(s_0) = (|\kappa(s_0)|)^{-1}$ que contiene a $\alpha(s_0)$. Probar que la curva α y el círculo osculador a α en s_0 tienen contacto de segundo orden. En particular ambos tienen la misma tangente.

13. Hallar los centros de curvatura y los círculos osculadores de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

14. Probar que la tangente al lugar geométrico de los centros de curvatura de α tiene la dirección de la normal de α. Ver también que la longitud del arco entre dos puntos es igual a la diferencia de los radios de curvatura en dichos puntos.